+ L'experience monte qu'une perturbation sur un syst en équilibre entraîne des oscillation autour de sa position d'équilibre.

+ Un oscillateur harmonique est un oscillateur dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale et dont la fréquence qui dép des caractéristiques du système.

+ Oscillateur mécanique (ressort, pendule simple ...)

+ Oscillateur électrique (circuit RLC ..)

On s'interesse par les oscillateurs mécanique.

I_ Etude générale d'un oscillateur harmonique :

soit un pt mat. en équilibre stable dans un repère galiléen a une dimension (Mvt axial) écarté de sa position d'équilibre et il est soumis à une force conservative qui tend à le ramener vers sa position d'équilibre.

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$$

Autour de la position d'équilibre stable x_0, $E_p(x)$ peut être écrite :

$$E_p(x) = \underbrace{E_p(x_0)}_{E_{p_0}} + (x - x_0) \cdot \left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x}$$

x_0 : position d'équation stable $\Rightarrow \begin{cases} \left.\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} = 0 \\ \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0 \end{cases}$

$E_p(x) = E_{p_0} + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$

où $k = \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0}$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_{p_0} + \frac{k}{2}(x-x_0)^2$$

M est soumise à une force conservative : $E_m = cste$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}(x-x_0) = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + k(x-x_0)) = 0$$

$\dot{x} = 0$ solution qui n'a pas de sens.

(M est en mvt) $\Rightarrow \dot{x} \neq 0$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}(x-x_0) = 0$$

On pose : $X = x - x_0$

(1) $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$: c'est l'éq. diff. d'un oscillateur harmonique

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

i/- Eq. horaire de mvt :

la solution de (1) est alors :

$$X(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

X_m : amplitude max.

ω_0 : pulsation $\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

T_0 : période propre du mvt.

$\omega_0 t + \varphi$: Phase à un instant t.

φ : Phase à $t = 0$

ii/- Détermination de la force conservative appliquée à l'oscillateur :

On a vu que : $E_p(x) = E_{p_0} + \frac{1}{2}k(\underbrace{x-x_0}_{X})^2$



Or : $\vec{F} = -\vec{grad}\, E_p$

$\Leftrightarrow F(x) = -\dfrac{dE_p}{dx} = -K(x - x_0)$

$\Rightarrow \vec{F} = -K(x - x_0)\,\vec{e_x}$:

$= -K X \vec{e_x}$; c'est une force de rappel.

iii/- Energie mécanique d'un oscillateur harmonique :

$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \dot{X}^2 + E_p(x)$

or $E_p = E_{p_0} + \frac{1}{2} K X^2$

Em pernant : $E_{p_0} = 0$: l'energie du systeme ds sa position d'équilibre.

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} K X^2$

Or : $X = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{X} = -\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$

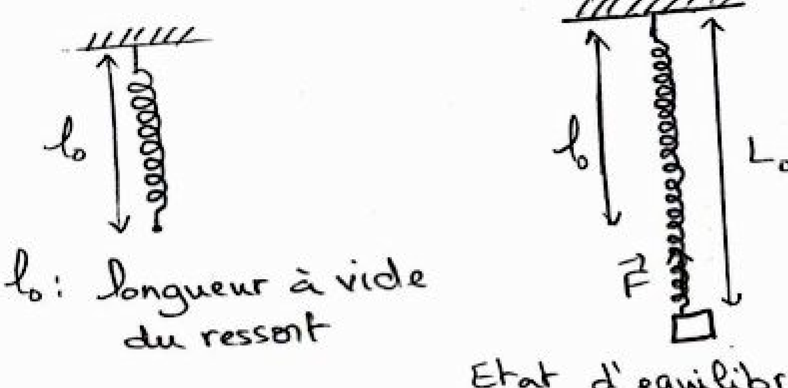
en écrivant que : $\omega_0^2 = \dfrac{K}{m}$

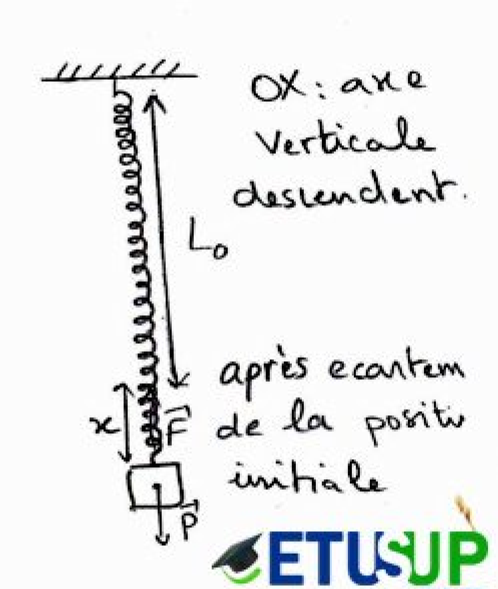
$E_m = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{K} X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} K X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} K X_m^2$

Conclusion :
L'energie mécanique est proportionnelle à l'amplitude maximale du mvt.

Exemple :
soit un pt M(m) :





⇒ On cherche l'évolution d'equilibre de x en fct ...

* A la position d'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\vec{P} + \vec{F} = mg\,\vec{e_x} - K(L_0 - l_0)\,\vec{e_x} = 0$$

$$\Rightarrow mg - K(L_0 - l_0) = 0$$

$$mg = K(L_0 - l_0) \quad (*)$$

* Après écartement : M est en mvt.

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$mg\,\vec{e_x} - k(L_0 + x - l_0)\,\vec{e_x} = m\ddot{x}\,\vec{e_x}$$

Par projection sur ox : $\underbrace{mg - k(L_0 - l_0)}_{0} - Kx = m\ddot{x}$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

C'est l'equation d'un oscillateur harmonique et

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

II - Oscillateurs libre amorties :

En pratique, les oscillateurs subissent d'une façon général des frottements qui transforment une partie de l'energie de l'oscillateur en chaleur.

Il existe plusieurs frottements, on va donc s'inter au frottements visqueux (exp: resistance de l'air).

⇒ la force de frottements visqueux est :

$$\vec{f_v} = -f \cdot \vec{V}$$

où $f > 0$: cste de frottement visqueux (ou coef de viscos

II. 1 - Equation du mvt :

En plus de la force de rappel, l'oscillation est soumis

à la force F_v :

$\Rightarrow -kX - f\dot{X} = m\ddot{X}$

$m\ddot{X} + f\dot{X} + kX = 0$

$\Rightarrow$ sous sa forme générale, l'équation est :

$$a\ddot{X} + h\dot{X} + bX = c$$

ou aussi : $\ddot{X} + \frac{h}{a}\dot{X} + \frac{b}{a}X = \frac{c}{a}$

où : $a, b, h > 0$ et c est une cste réelle.

et si on pose : $x = \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}$

$$\dot{x} = \frac{b}{a}\dot{X}$$

$$\ddot{x} = \frac{b}{a}\ddot{X}$$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{h}{a}\dot{x} + \frac{b}{a}x = 0$

Notation :

On pose : $\omega_0^2 = \frac{b}{a}$ $\qquad 2\alpha = \frac{h}{a}$

et aussi, on note : $2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$ et $\tau = \frac{1}{\alpha}$

α : cte d'amortissement.

τ : temps d'amortissement (de relaxation).

Q : facteur de qualité.

ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur.

$\Rightarrow \ddot{x} + 2\alpha x + \omega_0^2 x = 0$ (I)

c'est l'equation d'un oscillateur libre amorti

II - 2 - Differents régimes du mvt :

Pour résoudre I, on cherche l'éq. carct. :

$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \Delta' = \alpha^2 - \omega_0^2$

selon le signe de Δ' on distingue differents régimes.

i/- Régime apériodique :

C'est le cas où $\Delta' > 0$

$\Leftrightarrow \alpha > \omega_0$ et $Q < \frac{1}{2}$

les racines sont réelles $r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

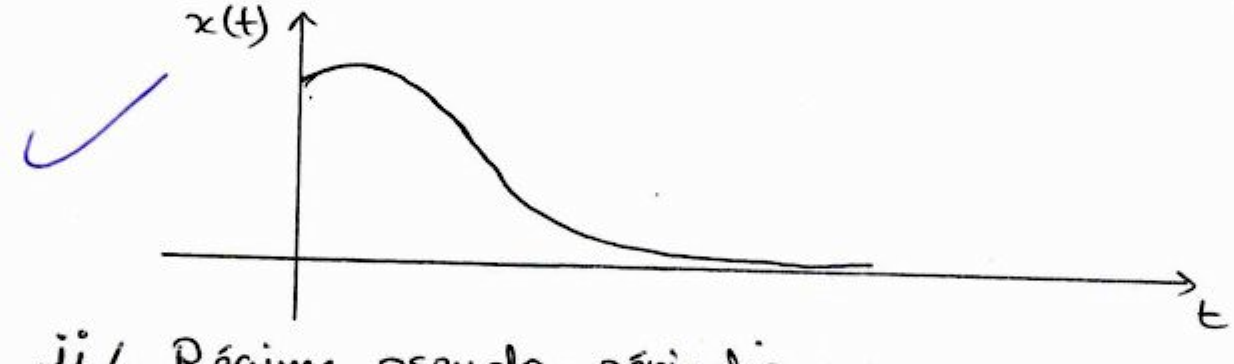
la solution est :

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(A e^{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t} + B e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

qd $t \nearrow$ $(t \to +\infty)$ $e^{-\alpha t} \to 0$ et

$x \to 0$: (amortissent sans oscillation)

c'est le régime a périodique.



ii/- Régime pseudo-périodique :

Cas où : $\Delta' < 0 \Leftrightarrow \alpha < \omega_0$ et $Q > \frac{1}{2}$

les deux racines st complexes :

$r_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

La solution est de la forme :

$x(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

ou : $x(t) = \underbrace{x_0 e^{-\alpha t}}_{X_m(t)} \cos(\omega t + \varphi)$

c'est une fonction pseudo périodique d'amplitude variable dans le temps et qui tend vers 0 qd $t \to +\infty$

$x(t) = X_m(t) \cos(\omega t + \varphi)$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T est la pseudo-Période)



Or : $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_0^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \qquad \left(2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}\right)$$

Caracteristique du mvt :

i/- temps de relaxation τ :

l'amplitude $X_m(t) = x_0 e^{-\alpha t}$

si $t = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow X_m = x_0 e^{-1} = \frac{x_0}{e}$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \tau$ C'est le temps pendant lequel l'amplitude se divise par e.

ii/- Décrément logarithmique δ :

Il est introduit pour caractériser aussi la décroissance de l'ampli du mvt.

Il est défini par :

$$\delta = \frac{1}{n} \log \frac{x(t)}{x(t+nT)} = ?$$

$$x(t) = X_m(t) \cos(\omega t + \varphi)$$
$$= X_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t+nT) = X_0 e^{-\alpha(t+nT)} \cos(\omega t + \varphi + 2\pi n)$$
$$= e^{-\alpha nT} X_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{+\alpha nT}$$

$$n\alpha T = \log \frac{x(t)}{x(t+nT)}$$

$\Rightarrow$ le décrément logarithmique est :

$$\delta = \alpha T \quad \text{(sans unité)}$$

plus $\delta \nearrow$ plus

régime pseudo-périodique

$$x(t) = x_0\, e^{-\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$$

* $\tau = \frac{1}{\alpha}$ $\qquad \varphi = ?$

* $\delta = \alpha T$

* facteur de qualité :

Cas où : α est très faible ($\alpha \ll \omega_0$)

Il s'agit de faibles amortissents (prendre : $m = a$, $k = b$)

$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \approx \omega_0^2 \Rightarrow \omega \simeq \omega_0$ et $T \simeq T_0$

$$x(t) = x_0\, e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

* Energie mécanique de l'osc :

$$E_m = E_c + E_p$$

$\rightarrow E_p = \frac{1}{2} k\, x^2(t)$

$\quad = \frac{1}{2} k\, x_0^2\, e^{-2\alpha t} \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\rightarrow E_c = \frac{1}{2} m\, \dot{x}^2$

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = x_0 \left(-\alpha e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) \right)$$

$$= -x_0\, e^{-\alpha t} \Big(\underbrace{\alpha \cos(\omega_0 t + \varphi)}_{Y_1} + \underbrace{\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)}_{Y_2} \Big)$$

Or $\alpha \ll \omega_0$ et puisque les fonctions sinus sont bornées (< 1) $\Rightarrow Y_1 \ll Y_2$)

$E_c = \frac{1}{2} m\, x_0^2\, \omega_0^2\, e^{-2\alpha t} . \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

Or : $k = m\, \omega_0^2$

$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2\, e^{-2\alpha t} = \frac{1}{2} k\, X_m^2 \qquad (X_m = x_0 e^{-\alpha t})$

Calculons maintenant la diminution relative d'energie mécanique au cours d'une pseudo-période.

c.à.d : $r = \dfrac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)}$ $(T \approx T_0)$

$$r = \frac{\frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t} - \frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t} \cdot e^{-2\alpha T_0}}{\frac{1}{2} K x_0^2 e^{-2\alpha t}}$$

$$= \left(1 - e^{-2\alpha T_0}\right)$$

puisque $\alpha \longrightarrow 0$ ($2\alpha T_0$ est faible aussi)

Or : si $x \longrightarrow 0 \Rightarrow e^{x} = 1 + x$

$$\Rightarrow r = 1 - (1 - 2\alpha T_0) = 2\alpha T_0$$

$$2\alpha = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q \cdot T_0}$$

$$2\alpha T_0 = \frac{2\pi}{Q} = r$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \cdot \frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T)}$$

conclusion :

le facteur de qualité traduit alors le rapport de l'energi de l'oscillateur sur l'energie perdue par l'oscillateur pendant une pseudo période.

iii/- régime critique :

C'est le cas où : $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \alpha = \omega_0$

La solution est alors : $x(t) = (At + B)\, e^{-\alpha t}$

representation : $x(t)$

$x(t)$

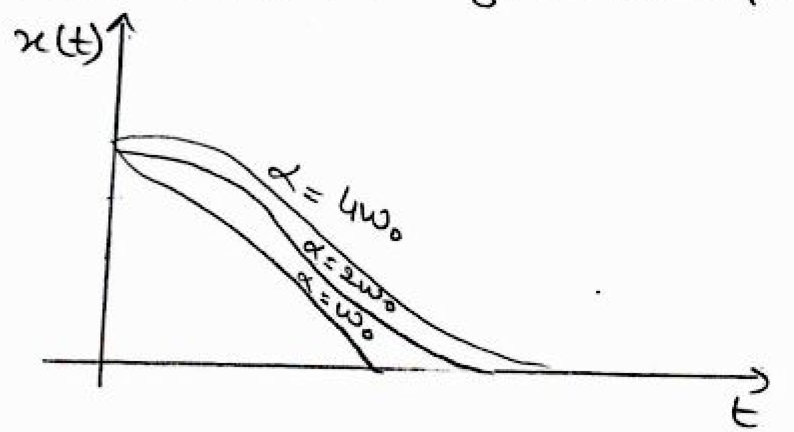
amortissement le plus rapide

$\alpha = \omega_0$

t



L'amortissement du régime apériodique est plus lent que celui dans le régime critique



Le régime critique est considéré comme cas limite entre le régime pseudo périodique et le régime périodique.

III - Oscillations entretenues (ou forcées) :

Les oscillations vues précedement s'aténuent au cours du temps à cause des frottements pour maintenir l'amplitude de ces oscillations constantes il faut fourn une energie égale à celle perdue par les frottements cela peut se faire en appliquant une force appellé excita sinusoïdale de même direction que le mvt oscillatoir

III-1 Equation du mvt :

Prenons l'exp. (M(m) + ressort).

⇒ le mvt est selon l'axe OX horizontal.

P.F.D : $\vec{P} + \vec{f}_r + \vec{f}_{fr} + \vec{F}(t) = m\vec{\gamma}(M)$

où $\vec{F}(t) = F(t) \cdot \vec{e}_x$

Par projection par rapport à OX :

$$-kx - f\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$



On pose ... m , ... m

C'est l'eq. d'un mvt oscillatoire forcée.

La solution de cette équation est la somme de :

- la solution de l'eq. SSM $x(t)$ qui traduit le régime transitoire (disparait pendant une durée).
- la solution particulière qui traduit le régime permanent, peut prendre l'une des trois formes d'un oscillateur libre amorti.

$x_1(t)$:

si $F(t) = F_0 \cos(\omega_e t + \varphi_F)$

$\Rightarrow x_p(t) = X \cos(\omega_e t + \varphi_x)$

III - 2 . Détermination de X et du déphasage : $\varphi = \varphi_x$

Pour cela, on va associer à :

$-x_p(t) \longrightarrow \bar{x}_p(t) = X e^{i(\omega_e t + \varphi_x)}$

et pour $F(t) \longrightarrow \bar{F}(t) = F_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_F)}$

$\Rightarrow \bar{x}_p(t) = \bar{X} e^{i\omega_0 t}$ et $\bar{F}(t) = \bar{F}_0 e^{i\omega_e t}$

où $\bar{X} = X e^{i\varphi_x}$ et $\bar{F}_0 = F_0 e^{i\varphi_F}$

Remplaçons $\bar{x}_p(t)$ et $\vec{F}(t)$ dans l'éq. ASM.

$$-\omega_e^2 \bar{X} + 2\alpha i \omega_e \bar{X} + \omega_0^2 \bar{X} = \frac{\bar{F}_0}{m}$$

$$X e^{i\varphi_x} \underbrace{(\omega_0^2 - \omega_e^2 + i 2\alpha\omega_e)}_{\Omega} = \frac{F_0}{m} e^{i\varphi_F}$$

$$X \Omega = \frac{F_0}{m} e^{-i\varphi} \quad (\varphi = \varphi_x - \varphi_F)$$

$$X\left((\omega_0^2 - \omega_e^2)\right) + i 2\alpha X \omega_e = \frac{F_0}{m}\cos(\varphi) - i\frac{F_0}{m}\sin\varphi$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha X \omega_e = -\frac{F_0}{m} \sin\varphi & (1) \\ X(\omega_0^2 - \omega_e^2) = \frac{F_0}{m} \cos\varphi & (2) \end{cases}$$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow \quad X = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\alpha^2 \omega_e^2}}$

(1) $\Rightarrow \sin\varphi < 0$

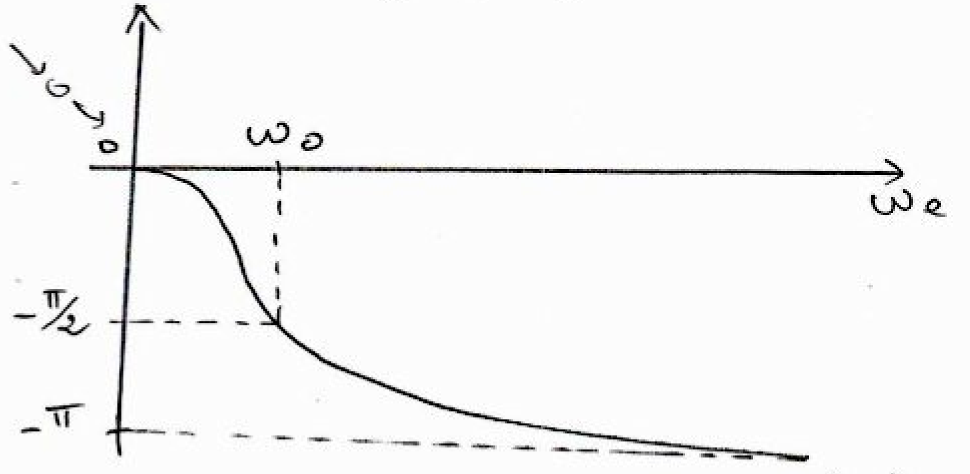
(2) $\Rightarrow$ le signe de $\cos\varphi$ dépend du signe de $\omega_0^2 - \omega$

$\Rightarrow$ le déphasage est < 0 $(-\pi \leq \varphi \leq 0)$

Ce qui signifie que la solution de (1) est en retard de phase par rapport à $F(t)$.

$(1)/(2) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{-2\alpha\omega_e}{\omega_0^2 - \omega_e^2}$

Représentation graphique :



Pour faible pulsation ω_e $x_p(t)$ est en phase avec ~~la~~ ~~force~~

$\omega_e = cste = \omega_0 \Rightarrow x_p$ est en retard de $\pi/2$ % a $F(t)$ (Elles sont en quadrature de phase).

pour ω très élevé ~~la~~ $x_p(t)$ est en retard de π (opposition de phase).



III-3 Etude de la résonance d'amplitude :

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2}}$$

Résonance ≡ X est max pour une pulsation ω_e.

résoudre $\frac{dX}{d\omega_e} = 0$

$$\frac{dX}{d\omega_e} = \frac{2X_0\omega_e(\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2\alpha^2)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega_e^2\right)^{3/2}} = 0$$

$\Leftrightarrow \omega_e = 0$ ou $(\omega_0^2 - \omega_e^2 - 2\alpha^2 = 0)$

c.à.d : $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 = \omega_r^2$

Or : $\omega_0^2 - 2\alpha^2$ doit être positive.

c.à.d : $\omega_0 > \sqrt{2}\,\alpha$

puisque : $\varphi = \frac{\omega_0}{2\alpha} \Rightarrow \varphi > \frac{\sqrt{2}}{2}$

La variation de $X(\omega_e)$ est aussi :

ω_e	0		ω_r		$+\infty$
$\frac{dX}{d\omega_e}$		+	0	−	
X		↗		↘	

On voit clairement que si :

$\omega_e < \omega_r \Rightarrow \omega_e^2 < \omega_r^2 \Rightarrow \frac{dX}{d\omega_e} > 0$

$\omega_e > \omega_r \Rightarrow \omega_e^2 > \omega_r^2 \Rightarrow \frac{dX}{d\omega_e} < 0$

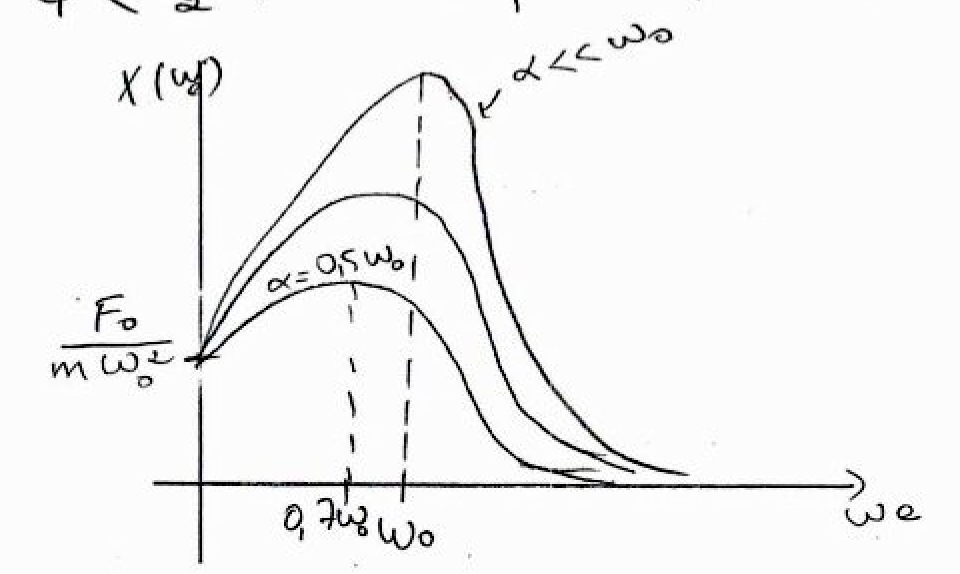
$\Rightarrow$ Il est bien évident que pour $\omega_e = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ l'amplitude est maximale.

$\Rightarrow$ Pour $\varphi > \frac{\sqrt{2}}{2}$ on dit qu'il y a raisonnance d'amplitud entre l'oscillation et la force d'excitation selon le degré d'amortissement (c.à.d α ⁒ $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ on φ n'



la raisonnance est plus ou moins forte.

si $\varphi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, on ne parle plus de raisonnance



III - 4 Etude énergitique :

i/- Energie perdue par l'oscillateur :

. C'est la force de frottement qui est à l'origine de cette perte.

* $\varphi_F = 0$

Calculons $W(\vec{F}_{fr})$ pendant une période.

$$dW(\vec{F}_{fr}) = \vec{F}_{fr} \cdot d\vec{OM}$$

$$= -f \cdot \dot{x} \cdot dx$$

$$= -f\,(\dot{x})^2\,dt$$

or : $x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi_x)$

or : $\varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi = \varphi_x - \varphi_F = \varphi_x$

$$x(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -X_m \omega_e \sin(\omega_e t + \varphi)$$

$$\Rightarrow dW(\vec{f}_{fr}) = -f\,X_m^2\,\omega_e^2 \sin^2(\omega_e t + \varphi) \cdot dt$$

or : $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$



III - 5 - Bande passante :

ici, on suppose : $\alpha \ll \omega_0 \Leftrightarrow$ il y a de faibles amortissements.

On a : $X(\omega_e) = \dfrac{X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\alpha\omega_e)^2}}$

lorsque ; $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} = \omega_r$

$\Rightarrow \omega_r \approx \omega_0 \qquad \left(2\alpha = \dfrac{\omega_0}{Q}\right)$

$\Rightarrow X_m = \dfrac{X_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{Q}\right)^2}} \Rightarrow X_m = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} \cdot Q^2$

la bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est t.q : $X(\omega) \geqslant \dfrac{X_m}{\sqrt{2}}$

pour chercher ω_1 et ω_2 :

On résoud : $X = \dfrac{X_m}{\sqrt{2}} \quad \left(X > \dfrac{X_m}{\sqrt{2}}\right)$

$\Rightarrow X^2 = \dfrac{X_m^2}{2} \Rightarrow (X(\omega_e))^2 = \dfrac{X_m^2}{2}$

$\omega_e^4 - 2\omega_e^2(\omega_0^2 - 2\alpha^2) + \omega_0^2 - 8\alpha^2\omega_0^2 = 0$

$\Rightarrow \Delta' = (\omega_0^2 - 2\alpha^2)^2 - \omega_0^4 + 8\alpha^2\omega_0^2$

$= \omega_0^4 - 4\omega_0^2\alpha^2 + (2\alpha^2)^2 - \omega_0^4 + 8\alpha^2\omega_0^2$

$= 4\alpha^2\omega_0^2 + (2\alpha^2)^2$

$= 4\alpha^2(\omega_0^2 + \alpha^2)$

or $\alpha \ll \omega \Rightarrow \Delta' = 4\alpha^2\omega_0^2$

$\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 + \sqrt{4\alpha^2\omega_0^2}$

ou $\omega_e^2 = \omega_0^2 - 2\alpha^2 - \sqrt{4\alpha^2\omega_0^2}$

$$W(\vec{f}_{fr}) = -\frac{f X_m^2 w_e^2}{2}\left[\int_0^T dT - \int_0^T \cos 2a\, dt\right]$$

(the second integral $= 0$)

$$W(\vec{f}_{fr}) = -\frac{f X_m^2 w_e^2 T}{2} \qquad \left(T = \frac{2\pi}{w_e}\right)$$

i/- Energie gagnée par l'oscillateur

herchons le travail de $\vec{F}_e$ pendant une période:

$$dW(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot d\vec{OM}$$

$$= F_e \cdot \dot{x}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad = -F_0 \cos w_e t \,(X_m w_e \sin(w_e t + \varphi)$$

Or $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

$$\Rightarrow dW_e(\vec{F}_e) = -\frac{F_0 X_m w_e}{2}\left[\sin(2w_e t + \varphi) + \sin\varphi\right] dt$$

$$\Rightarrow W(\vec{F}_e) = -\frac{F_0 X_m w_e}{2}\left[\int_0^T \sin(2w_e t + \varphi)\, dt + \int_0^T \sin\varphi\, dt\right]$$

$$= -\frac{F_0 X_m w_e}{2} \sin\varphi \cdot T$$

Or : $2\alpha X w_e = -\frac{F_0}{m}\sin\varphi$

$$W(\vec{F}_e) = \frac{F_0 X_m w_e}{2} \cdot T \left(\frac{2\alpha X w_e m}{F_0}\right)$$

Or on a : $2\alpha = \frac{f}{m}$

$$W(\vec{F}_e) = \frac{f X_m^2 w_e^2 T}{2}$$

$$\Rightarrow \left|W(\vec{F}_{fr})\right| = \left|W(\vec{F}_e)\right|$$

l'énergie perdue par l'oscillateur à cause des frott-

est fournit par la force excitatrice : On dit que

les oscillations sont entretenues

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\omega_0 \qquad \left(2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}\right)$$

$$= \omega_0^2\left(1 \pm \frac{1}{Q}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_{1e} = \omega_0\sqrt{1+\frac{1}{Q}} \\ \omega_{2e} = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q}} \end{cases}$$

$\alpha \ll \omega_0 \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} \gg 1$ (Q élevée)

$$\Rightarrow \frac{1}{Q} \ll 1$$

Or : $(1+a)^{1/2} \approx 1 + \frac{a}{2}$ $\quad (a \longrightarrow 0)$

$$\Rightarrow \omega_{1e} = \omega_0\left(1 - \frac{1}{2Q}\right)$$

$$\omega_{2e} = \omega_0\left(1 + \frac{1}{2Q}\right)$$

On calule : $\Delta\omega = \omega_{2e} - \omega_{1e}$

$$\Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\alpha = 2\cdot\frac{1}{\tau}$$

et on écrit : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

$$\tau = \frac{2}{\Delta\omega} \quad \text{ou} \quad \tau\cdot\Delta\omega = 2$$

X_m

$\frac{X_m}{\sqrt{2}}$

ω_{1e} $\quad \omega_0$ $\quad \omega_{2e}$

$\Delta\omega$

$$X_m = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,Q.$$

plus SW est faible, plus le facteur de qualité est grand

t plus l'amplitude est maximale.

